Diverses

Lösung der Quadratische Gleichung

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Geometrie

Skalarprodukt

$\vec{a}, \vec{b} \neq 0$:
$< a, b >= 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b} \perp -\vec{b} \times \vec{a}$

Trigonometrie

Bogenmass

$\pi = 180°$

Einheitskreis / Kreis

$\sin\alpha = \frac{y}{r} = y$
$\cos\alpha = \frac{x}{r} = x$
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

Rechtwinkliges Dreieck

$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$
$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$
$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$

Spezielle Winkel

α	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Formeln

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(x) \cdot \sin(y)$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$
$\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Komplexe Zahlen

Normalform

$z = a + bi$
$Re(z) = a$
$Im(z) = b$

Polarform/Exponentialform

$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Umformen

Normalform→Polarform

$r = |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
$arg(z) = \pi + \alpha$ (grafisch!)

Polarform→Normalform

$a = Re(z) = r \cdot \cos\varphi$
$b = Im(z) = r \cdot \sin\varphi$

Wurzelziehen

$z^n = a = |a|e^{i\varphi}$
$z_k = \sqrt[n]{a} \cdot \exp\frac{i\varphi}{n} + k\frac{2\pi i}{n}$

Grenzwerte

Konstante

Brüche

Für $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

Produkte

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x))$

Summen

$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) + (\lim_{x\to x_0} g(x))$

Bernoulli

Für $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
oder $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Lineare Algebra

Lösung eines Gleichungssystems

$Ax = b$	inhomogen $b \neq \vec{0}$	homogen $b = \vec{0}$
$det(A) \neq 0$ regulär $\leftrightarrow \exists A^{-1}$	$x \neq \vec{0}$ $\exists$ genau ein x so dass $Ax = b$	$x = \vec{0}$
$det(A) = 0$ singulär	1) # Lösungen ∞ 2) keine Lösung	# Lösungen ∞

Erlaubte Operationen

1. Zeilen zueinander addieren
2. Zeilen vertauschen
3. Zeilen mit einem Faktor $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ multiplizieren

Determinante

$det(A) = det(A^T)$
$det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B)$
$det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow det(A^{-1}) = det(A^{-T})$
$det\begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Erlaubte Operationen

- Zeilentausch / Spaltentausch mit Vorzeichenwechsel
- Faktor rausziehen
- Zeilenaddition / Zeilensubtraktion

Invertieren

1. Zeilen multiplizieren mit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
2. Zeilen zueinander addieren / subtrahieren

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Überprüfen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte λ

Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Charakteristisches Polynom

$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$:
$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 0 = 4 + \lambda^2 - 5\lambda = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$

Eigenvektor zum Eigenwert λ

$Av = \lambda v$
$(A - \lambda I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & 4-1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right), \text{ z.B. } \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Differentialrechnung

Ableitungsregeln

Faktorregel

$y = C \cdot f(x)$
$y' = C \cdot f'(x)$

Summenregel

$y = f_1(x) + f_2(x)$
$y' = f_1'(x) + f_2'(x)$

Produktregel

$y = f_1(x) \cdot f_2(x)$
$y' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

Quotientenregel

$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$
$y' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Verkettete Funktionen

$f(u,v) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^3 + v \\ u - v \end{pmatrix}$

$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x + \frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$

$h(x,y,z) = f(g(x,y,z)) = f\begin{pmatrix} y \\ x + \frac{z^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 + x + \frac{z^2}{2} \\ y - x - \frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$

Direkte Ableitung

$$dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{dx} & \frac{\partial h_1}{dy} & \frac{\partial h_1}{dz} \\ \frac{\partial h_2}{dx} & \frac{\partial h_2}{dy} & \frac{\partial h_2}{dz} \end{pmatrix}$$

$$dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & y^2 & z \\ -1 & 1 & -z \end{pmatrix}$$

Indirekte Ableitung mit Kettenregel

$dh(x,y,z) = df(g(x,y,z)) \cdot dg(x,y,z)$

$$dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} u^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{g(x,y,z)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y^2 & z \\ -1 & 1 & -z \end{pmatrix}$$

Hessematrix

$$H(f) = H_f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Die Niveaulinie steht senkrecht auf den Gradienten!

Änderungsrate/Richtungsableitung

$|\nabla f(p)| \cdot \cos\vartheta =< \nabla f(p), \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} >$
p: Stelle, ϑ: Winkel, $\vec{x}$: Richtung

Kurvenparametrisierung

Gerade

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a - t(a-d) \\ b - t(b-d) \\ c - t(c-f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{pmatrix}$$

Kreisbogen

Radius: r, Mittelpunkt: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\gamma[p_1, p_2] \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a + rcos(t) \\ b + rsin(t) \\ c \end{pmatrix}$$

Flächenparametrisierungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

x,y-Ebene

$$\phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\phi_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

paraboloid

$$\phi_3(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

Kugeloberfläche

$$\phi_4(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ \sin v \end{pmatrix}$$

Koordinatenlinien

Koordinatenlinien sind Linien in einem Koordinatensystem, auf denen bis auf jeweils eine alle Koordinaten konstant sind.

Koordinatengleichung

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(\phi_i) = Niveau$ für alle Parameterwerte
$g_{x,y-Ebene}(u, v, w) = w$
$g_{paraboloid}(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
$g_{Kugel}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Tangentialebene

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Tangentialebene an ϕ im Punkt $\phi_0 := \phi(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Parameterform

2 Tangentialvektoren, 1 Stelle im Raum

$$T(\mu, \lambda) = \phi_0 + \mu\phi_x + \lambda\phi_y$$

$\phi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$, $\phi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$ Tangentialvektoren

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung/Ebenengleichung

Normale auf Ebene, 1 Stelle im Raum
Normale: $\phi_x \times \phi_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Ebenengleichung: $-2x - 2y + z = c$
Stelle einsetzen: $-2(1) - 2(1) + 2 = c$
$c = -2$
$-2x - 2y + z = -2$

Differentialgleichungen

Qualitative Aussagen

Aussagen über x(t) ohne explizites Ausrechnen.

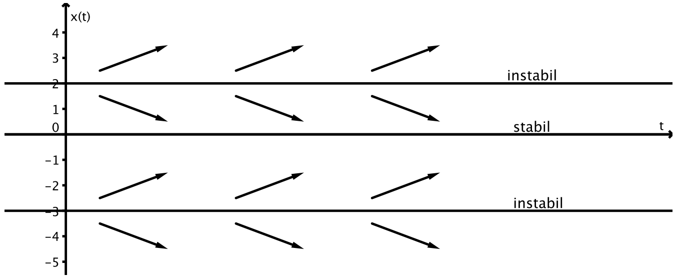
Gleichgewichtslösung x_g

$\dot{x} \stackrel{!}{=} 0$, nach x_g auflösen

$0 \stackrel{!}{=} (x_g - 2)^3(x_g + 3)x_g$
$x_{g,1} = 2$
$x_{g,2} = -3$
$x_{g,3} = 0$

Richtungsfeld in der $(t, x(t))$-Ebene

$x > 2 \Rightarrow \dot{x} > 0$
$2 > x > 0 \Rightarrow \dot{x} < 0$
$0 > x > -3 \Rightarrow \dot{x} > 0$
$-3 > x \Rightarrow \dot{x} < 0$



Lösung der DGL

$\underbrace{\dot{x} = x}_{Hom} + 3t^2$
$x(0) = 12$

Homogene Lösung

1. Ansatz

$x_{Hom}(t) = ce^{\lambda t}$
$\dot{x}_{Hom}(t) = c\lambda e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{x} - x &= 0 \\ c\lambda e^{\lambda t} - ce^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda - 1 &= 0 \Rightarrow x_{Hom}(t) = ce^t \end{aligned}$$

2. Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int dt \\ \ln(x) &= t + c \\ x_{Hom}(t) &= ce^t \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung

1. Ansatz

$x_{Part}(t) = at^2 + bt + c$
$x_{Part}(t) = ae^{ct}$
$x_{Part}(t) = asin(t) + bcos(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3t \\ 2at + b &= at^2 + bt + c + 3t^2 \\ 0 &= t^2(a+3) + t(b-2a) + c - b \\ &\Rightarrow a = -3, b = -6, c = -6 \\ x_{Part}(t) &= -3t^2 - 6t - 6 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

1. Zusammengesetzt

$x_{Allg} = x_{Hom} + x_{Part}$

$$\begin{aligned} x_{Hom}(t) &= ce^t \\ x_{Part}(t) &= -3^2 - 6t - 6 \\ x_{Allg}(t) &= ce^t - 3t^2 - 6t - 6 \end{aligned}$$

2. Variation der Konstanten

$c = c(t)$
$x(t) = c(t) \cdot e^t$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3t^2 \\ \dot{c}e^t + ce^t &= ce^t + 3t^2 \\ \dot{c} &= 3e^{-t}t^2 \\ c(t) &= \int 3e^{-t}t^2 dt \\ &= e^{-t}(-3t^2 - 6t - 6) + kx(t) \quad = c(t)e^t \\ &= (e^{-t}(-3t^2 - 6t - 6) + k)e^t \\ x_{Allg} &= -3t^2 - 6t - 6 + ke^t \end{aligned}$$

Überprüfen!

Erfüllt $x(t)$ die DGL? Einsetzen!

Anfangswertproblem

Anfangswerte einsetzen und Konstanten bestimmen

2×2 DGL Systeme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Homogene Lösung mit Ansatz

$\vec{x}_{Hom}(t) = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

Partikuläre Lösung mit Ansatz

$\vec{x}_{Part} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}$
$\vec{x}_{Part} = \begin{pmatrix} ae^c t \\ be^c t \end{pmatrix}$
$\vec{x}_{Part} = \begin{pmatrix} a\sin(t) + b\cos(t) \\ c\sin(t) + d\cos(t) \end{pmatrix}$

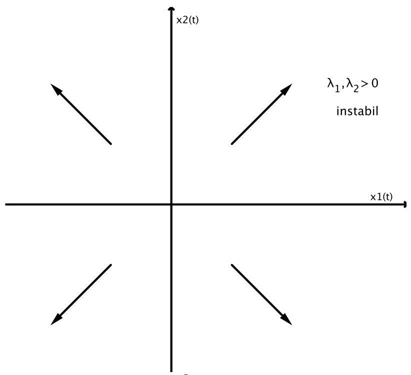
Allgemeine Lösung

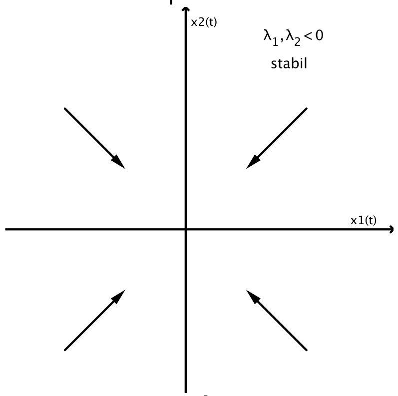
$\vec{x} = \vec{x}_{Hom} + \vec{x}_{Part}$

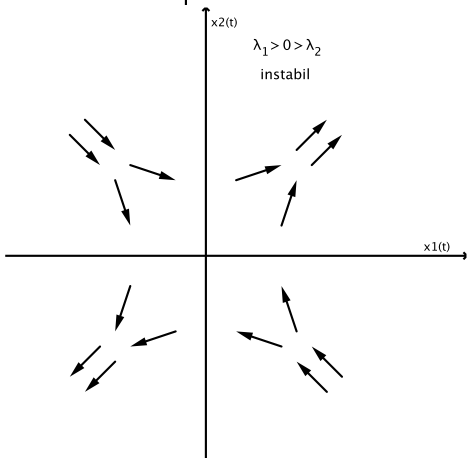
Phasenportrait

Qualitativer Verlauf der Lösungen von $\dot{x} = A\vec{x}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)
Reelle Eigenwerte siehe Grafiken
Imaginäre Eigenwerte:

- $Re(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \Rightarrow$ oszillierend
- $Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0 \Rightarrow$ stabil, Gegenuhrzeigersinn
- $Re(\lambda_1, \lambda_2) > 0 \Rightarrow$ instabil, Gegenhurzeigersinn







Taylorpolynom

Lokale Approximation einer Funktion mit einem Polynom
Linearisieren: Taylorpolynom 1.Ordnung

Taylorpolynom vom Grad n um x_0:
$f_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W \subset \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$

Wertebereich/Bildbereich

$W = \mathbb{R}$

Niveaulinien

Menge an (x, y) im Definitionsbereich mit $f(x, y) = k$, wobei $k \in \mathbb{R}$ 'Niveau'

Extremalaufgaben

Eindimensionaler Fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Kritischer Punkt

x_0 kritisch, wenn $f'(x_0) = 0$

Lokales Maximum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Globales Maximum

$f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$

Kandidaten: kritische Stellen, Randpunkte

Lokales Minimum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Globales Minimum

$f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$

Kandidaten: kritische Stellen, Randpunkte

Sattelpunkt

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0$ und$f'''(x_0) \neq 0$

Mehrdimensionaler Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Kritische Stellen

$\vec{p} \in D$ mit $df(\vec{p}) = \vec{0}$

Klassifikation

Klassifikation mit Hessematrix

det $H > 0$: lokales Minimum/Maximum
det $H < 0$: Sattelpunkt

Integralrechnung

Unbestimmte Integrale

Konstante c nicht vergessen!

Wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x+C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)+C$

Rechnen mit Integralen

Faktorregel

$\int_a^b C\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = C\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Summenregel

$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Vertauschungsregel

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Grenzen

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Symmetrieeigenschaften

$f(x)=f(-x)$ gerade
$g(x)=-g(-x)$ ungerade
$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int_{-a}^a g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Partielle Integration

$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \cos(x)x\,\mathrm{d}x &= \sin(x)\cdot x - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\cdot x + \cos(x) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int \ln(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x) - x + c\\ &= x(\ln(x)-1)+c\end{aligned}$$

Substitution

$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2)x\,\mathrm{d}x &= \int \ln(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}(u(\ln(u)-1))+c\\ &= \frac{1}{2}(x^2(\ln(x^2)-1))+c\end{aligned}$$

$(x^2 = u \Rightarrow \frac{dx^2}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow 2x = \frac{du}{dx} \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du)$

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x+7)^8\,\mathrm{d}x &= \int_{1+7}^{2+7} u^8\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{9}u^9\Big|_8^9 = 9^8 - \frac{8^8}{9}\end{aligned}$$

$(x+7=u \Rightarrow \frac{d(x+7)}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = du)$

Tricks

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x))+c$

$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x)+c$

$\int f^n f'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}f^{n+1}+c$

$\int \sin^5(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin^6(x)+c$

Mehrfachintegrale

$\int_I \mathrm{d}x$	Länge von I
$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$	Fläche zwischen $f(x)$ und I
$\int\int_\Omega \mathrm{d}x$	Fläche von Ω
$\int\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$	Volumen von $f(x,y)$ über Ω
$\int\int\int_B \mathrm{d}x$	Volumen von B
$\int\int\int_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$	z.B. Trägheitsmoment

Koordinatentransformationen

Kartesisch $\to$ Polar

$\phi = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{vmatrix} = \det(\phi') = r$

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega x^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lvert\det(\phi')\rvert\cdot f(\phi(r,\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \ldots = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Kartesisch → Zylinder

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det(\phi') = r$$

Kartesisch → Kugel (1)

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r\sin(\vartheta) \end{vmatrix}$$
$$= \det(\phi') = r^2\sin(\vartheta)$$

Kartesisch → Kugel (2)

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & 0 & -r\cos(\vartheta) \end{vmatrix}$$
$$= \det(\phi') = r^2\cos(\vartheta)$$

Kurvenlänge

$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2}\,\mathrm{d}t$

$\gamma : [2,3] \to \mathbb{R}^2$

$t \to \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} L\gamma &= \int_2^3 |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 |\begin{pmatrix} 1 \\ (t-1)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 \sqrt{1^2 + ((t-1)^{\frac{1}{2}})^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^3 \sqrt{1+t-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^3 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \ldots = 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Vektorfeld

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor zu.

$$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)x + \cos(x) + y + \frac{1}{2}z^2 \\ x \\ zx \end{pmatrix}$$

Rotation

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Potentialfunktion

- Falls $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$ so heisst $\vec{F}$ rotations- oder wirbelfrei.
- $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld oder ist konservativ, falls eine Funktion existiert $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla_p = \vec{F}$ und Definitionsbereich einfach zusammenhängend.
- Falls $\vec{F}$ Potentialfeld, dann existiert eine Potentialfunktion.

Suche nach einer Potentialfunktion

Komponentenweise integrieren.

$$\begin{aligned} \int F_1\,\mathrm{d}x &= \int -\sin(x)x + \cos(x) + y + \frac{1}{2}z^2\,\mathrm{d}x \\ &= x\cos(x) + xy + \frac{1}{2}xz^2 + c(y,z) \\ \int F_2\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}y = xy + c(x,z) \\ \int F_3\,\mathrm{d}z &= \int zx\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2x + c(x,y) \end{aligned}$$

$p(x,y,z) = x\cos(x) + xy + \frac{1}{2}z^2x + c$

Arbeit des Vektorfeldes F entlang γ

$W = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

- Bei Potentialfeldern hängt die Arbeit nur vom End- und Anfangspunkt ab.
- Falls F konservativ: $\int_{\gamma_{geschlossen}} F = 0$

$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$t \to \begin{pmatrix} 2\pi \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \int_\gamma F &= \int_0^{2\pi} < F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} < F\begin{pmatrix} 2\pi \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} > \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^4 \\ 2\pi \\ 2\pi t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} > \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi + 4\pi t^3\,\mathrm{d}t = 4\pi^2 + 16\pi^5 \end{aligned}$$